Λύσεις Διαγωνίσματος: ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ (18/10/2015)

ΘΕΜΑ 1º

(A) Θεωρία → Σχολικό, σελ. 17

(B) Θεωρία → Σχολικό, σελ. 9

(Γ)
1. Σωστό
2. Λάθος
3. Σωστό
4. Σωστό
5. Σωστό
6. Λάθος
7. Λάθος
8. Λάθος

ΘΕΜΑ 2º

(A) Παράδειγμα 8, Βιβλίο Εν Δυνάμει → σελ. 11

... $\boxed{(x,\psi)=(-5,-13)}$

(B) Άσκηση 2.8, Βιβλίο Εν Δυνάμει → σελ. 23

$$D=\begin{vmatrix}\sqrt{2}+1 & -2\\ 3 & 1-\sqrt{2}\end{vmatrix}=(\sqrt{2}+1)(1-\sqrt{2})+6=1-2+6=5$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\sqrt{2}+5 & -2\\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2}\end{vmatrix}=(\sqrt{2}+5)(1-\sqrt{2})+2(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}-2+5-5\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}=5-2\sqrt{2}$$

$$D_\psi=\begin{vmatrix}\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+5\\ 3 & 1+\sqrt{2}\end{vmatrix}=(\sqrt{2}+1)^2-3(\sqrt{2}+5)=2+2\sqrt{2}+1-3\sqrt{2}-15=-12-\sqrt{2}$$

Άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση των:

$$(x,\psi)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_\psi}{D}\right)\to\boxed{(x,\psi)=\left(\frac{5-2\sqrt{2}}{5},\frac{-12-\sqrt{2}}{5}\right)}$$

(Γ) Άσκηση 1.12, Βιβλίο Εν Δυνάμει - σελ. 14

Έχουμε την εξίσωση: $x^3+ax^2-x-\beta+5=0$ (1)

i) Από (1) $\xRightarrow{x=1}$ $1+a-1-\beta+5=0 \Leftrightarrow a-\beta=-5$

Από (1) $\xRightarrow{x=-2}$ $-8+4a+2-\beta+5=0 \Leftrightarrow 4a-\beta=1$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} a-\beta=-5 \\ 4a-\beta=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta=a+5 \\ 4a-a-5=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta=a+5 \\ 3a=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \boxed{\beta=7} \\ \boxed{a=2} \end{array}$$

ii) Για $a=2$ και $\beta=7$ η (1) γίνεται:

$x^3+2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$

$x^2(x+2)-(x+2)=0 \Leftrightarrow$

$(x+2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$(x+2)(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$x=-2$ ή $x=1$ ή $x=-1$.

άρα η τρίτη λύση της (1) είναι η $\boxed{x=-1}$

ΘΕΜΑ 3ο

(Α) Παράδειγμα 2, Βιβλίο Εν Δυνάμει - σελ. 26

... $\boxed{(x,\psi,\omega)=(1,-3,-2)}$

(Β) i) $D=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix}=2\lambda-\lambda^2=\lambda(2-\lambda)$

$D_x=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix}=-2(1-\lambda)-\lambda=-2+2\lambda-\lambda=\lambda-2=-(2-\lambda)$

$D_\psi=\begin{vmatrix} -\lambda & 1-\lambda \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2-\lambda^2(1-\lambda)=-\lambda^2-\lambda^2+\lambda^3=-2\lambda^2+\lambda^3=-\lambda^2(2-\lambda)$

Έστω $D=0 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=2$

• Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 2$, το (Ε) έχει μοναδική λύση:

$$(x,\psi)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_\psi}{D}\right)=\left(\frac{-(2-\lambda)}{\lambda(2-\lambda)},\frac{-\lambda^2(2-\lambda)}{\lambda(2-\lambda)}\right)$$

$$\boxed{(x,\psi)=\left(-\frac{1}{\lambda},-\lambda\right)}$$

• Αν $\lambda=0$, το (Ε) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l}\psi=1\\-2\psi=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\psi=1\\ \psi=0\end{array} \quad \text{Αδύνατο}$$

• Αν $\lambda=2$ το (Ε) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l}-2x+\psi=-1\\4x-2\psi=2\end{array}\right\} \underset{:2}{\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l}2x-\psi=1\\2x-\psi=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow 2x-\psi=1 \Leftrightarrow \psi=2x-1$$

άρα το (Ε) έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\boxed{(x,\psi)=(x,2x-1),\ x\in\mathbb{R}}$

ii) Έχουμε: $(x_0,\psi_0)=\left(-\frac{1}{\lambda},-\lambda\right)$, $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 2$

Είναι: $2x_0+\psi_0=-3 \Leftrightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right)-\lambda=3 \Leftrightarrow -\frac{2}{\lambda}-\lambda=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2-\lambda^2=-3\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda=1}$ ή $\lambda=2$ Απορ.

ΘΕΜΑ 4ο

(Α) i) Παράδειγμα 5, Βιβλίο Εν Δυνάμει → σελ. 29

... $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(1,2)$, $(-1,-2)$

ii) Παράδειγμα 6, Βιβλίο Εν Δυνάμει → σελ. 29

... $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,0)$, $(1,0)$

(Β) Έχουμε: $4D^2-4D+D_\psi^2+18=8D_\psi-9D_x^2-6D_x$

$\Leftrightarrow 4D^2-4D+9D_x^2+6D_x+D_\psi^2-8D_\psi+18=0$

$\Leftrightarrow 4D^2-4D+1+9D_x^2+6D_x+1+D_\psi^2-8D_\psi+16=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(2D-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(3D_x+1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(D_\psi-4)^2}_{\geq 0}=0$

$\Leftrightarrow 2D-1=0$ και $3D_x+1=0$ και $D_\psi-4=0$

$\Leftrightarrow D=\frac{1}{2}$ $\quad D_x=-\frac{1}{3}$ $\quad D_\psi=4$

Άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση:

$(x,\psi)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_\psi}{D}\right)=\left(\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}},\frac{4}{\frac{1}{2}}\right)\rightarrow \boxed{(x,\psi)=\left(-\frac{2}{3},8\right)}$

(Γ) i) Πρέπει το παρακάτω (Σ) να έχει δύο λύσεις.

$$\begin{cases} x^2+\psi^2=5 & (1) \\ \psi=2x+\lambda & (2) \end{cases}$$

Από $(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x^2+(2x+\lambda)^2=5 \Leftrightarrow x^2+4x^2+4\lambda x+\lambda^2=5$

$\Leftrightarrow 5x^2+4\lambda x+\lambda^2-5=0$ (3)

Η εξίσωση (3) έχει $\Delta=16\lambda^2-20(\lambda^2-5)=16\lambda^2-20\lambda^2+100=-4\lambda^2+100$

Η (3) πρέπει να έχει δύο διαφορετικές ρίζες,

άρα $\Delta>0 \Leftrightarrow -4\lambda^2+100>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2<100 \Leftrightarrow \lambda^2<25$

$\Leftrightarrow |\lambda|<5 \Leftrightarrow \boxed{-5<\lambda<5}$

ii) Πρέπει το (Σ) να έχει μοναδική λύση, οπότε και η (3) θα πρέπει να έχει διπλή ρίζα.

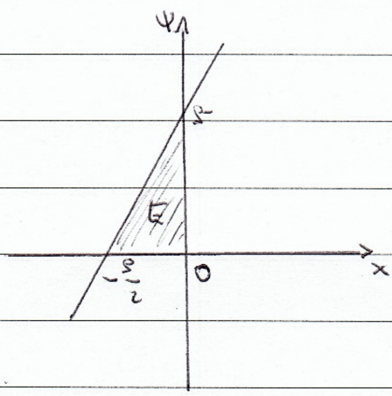
α) πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow -4\lambda^2 + 100 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda = \pm 5$

αφού $\lambda > 0$, τότε $\boxed{\lambda = 5}$

β) Για $\lambda = 5$ η ευθεία γίνεται:

$\psi = 2x + 5 \quad (\varepsilon)$

x	0	$-\frac{5}{2}$
ψ	5	0



$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2}\left|-\frac{5}{2}\right| \cdot |5| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5$

$\boxed{E = \frac{25}{4} \text{ τ.μ.}}$